Dossier n°87 : Exemples de problèmes dont la résolution conduit à des calculs de PGCD ou PPCM d deux entiers naturels.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 5 décembre 2003
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires.

En classe de troisième, ils travaillent sur la notion de PGCD de deux entiers et sur l'algorithme d'Euclide.

En classe de Seconde, ils étudient les nombres premiers ainsi que la décomposition des entiers en facteurs premiers.

Enfin, en Terminale S, enseignement de spécialité, ils étudient la divisibilité dans $\mathbb{Z}$, la division euclidienne, l'algorithme d4euclide, les entiers premiers entre eux, la notion de PPCM et les théorèmes de Bézout et Gauss.

Je choisis donc de situer ce dossier au niveau de la Terminale S, enseignement de spécialité.

II Commentaires généraux.

Le but de ce dossier est d'utiliser les notions de PGCD et PPCM afin de résoudre des problèmes concrets. Il permet notamment de voir des exemples pratiques de calcul de PCD et de PPCM.

Pour traiter ce dossier au mieux, il convient de rappeler les définitions de PGCD et de PPCM :

Théorème - Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

1. Il existe un unique entier naturel δ qui vérifie les deux conditions suivantes :
   - δ est un diviseur commun à a et b ;
   - tout diviseur commun à a et b divise δ

δ est appelé **le plus grand commun diviseur de a et b** et on écrit **δ = PGCD(a ;b).**

2. Il existe un unique entier naturel μ qui vérifie les deux conditions suivantes :
   - μ est un multiple commun à a et b ;
   - μ divise tout multiple commun à a et b.

μ est appelé **le plus petit commun multiple de a et b** et on écrit **μ = PPCM(a ;b).**

Il existe alors plusieurs façons de calculer le PGCD et le PPCM de deux entiers relatifs.

Algorithme d'Euclide :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. La suite des divisions euclidiennes :

- de a par b : $a = bq_0 + r_0$, $0 \le r_0 < b$;
- de b par r_0 : $b = r_0q_1 + r_1$, $0 \le r_1 < r_0$;
- de r_0 par r_1 : $r_0 = r_1q_2 + r_2$, $0 \le r_2 < r_1$;
- …
- de r_{n-1} par r_n : $r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}$, $0 \le r_{n+1} < r_n$

finit par s'arrêter, un des reste r_i étant nul.

Le dernier reste non nul est alors le PGCD de a et b (si $r_0 = 0$, c'est b).

Relation entre PGCD et PPCM :

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On a : PGCD(a ;b) $\times$ PPCM(a ;b) = $|ab|$

PPCM et décomposition en facteurs premiers :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que a = $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_n^{\alpha_n}$ et b = $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_n^{\beta_n}$ où p_1, p_2, …, p_n sont des nombres premiers distincts, α_1, α_2, …, α_n, β_1, β_2, …, β_n sont des entiers naturels.

Alors PPCM(a ;b) = $p_1^{\max(\alpha_1;\beta_1)} \times p_2^{\max(\alpha_2;\beta_2)} \times \ldots \times p_n^{\max(\alpha_n;\beta_n)}$.

J'ai choisi de vous présenter trois exercices conduisant au calcul d'n PPCM et/ou d'un PGCD et mettant en œuvre les différentes façons de calculer un PPCM et un PGCD. Plus précisément :

- l'exercice n°1 conduit au calcul d'un PPCM ;
- l'exercice n°2 conduit au calcul d'un PPCM et d'un PGCD ;
- l'exercice n°3 conduit à la résolution d'une équation diophantienne.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.

But : déterminer au bout de combien de temps un coureur aura exactement un tour d'avance sur un autre.

Méthode : Calcul d'un PPCM.

Outils : PPCM et décomposition en facteurs premiers.

III.2 Exercice n°2.

But : Déterminer les dimensions de boîtes permettant d'en remplir d'autres sans espace vide.

Méthode : Calcul d'un PGCD et d'un PPCM.

Outils :

- Algorithme d'Euclide ;
- Relation entre PGCD et PPCM.

III.3 Exercice n°3.

But : Déterminer le jour de conjonction de deux astres célestes de période différente.

Méthode : résolution d'une équation diophantienne.

Outils :

- *Théorème de Bézout :*

  Deux entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe des entiers relatifs u et v tels que au +bv = 1.

- *Théorème de Gauss :*

  Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls. Si divise bc et si a est premier avec b alors a divise c.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (n°35 p 354, Terracher TS 2002).

Sur un vélodrome, deux cyclistes partent en même temps d'un point M et roulent à vitesse constante.

Le coureur A boucle le trou de circuit en 35 secondes et le coureur B en 42 secondes. Au bout de combien de temps le coureur A aura-t-il exactement un tour d'avance ?

IV.2 Exercice n°2 (n°99 p 361, Terracher TS 2002).

Soit B une boite en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$.

1. Dans cette question, $l = 858$ et $L = 1365$.

   On veut remplir la boite B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boite B sans laisser d'espace vide).

   Quelle est la plus grande valeur possible pour a ? Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

2. Dans cette question, $l = 858$ et $L = 1365$.

   On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boites B toutes identiques, telles que décrites dans la question 1 (les boites B, empilées verticalement doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

   Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ? Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

IV.3 Exercice n°3 (n°101 p 361, Terracher TS 2002).

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard, il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux corps aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple (u,v) est solution de l'équation (E_1) : $34x – 27y = 2$.
2. a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (x_0,y_0) solution particulière de l'équation (E_2) : $35x – 27y = 0$.

   b) En déduire une solution particulière (u_0, v_0) de (E_1).

   c) Déterminer toutes les solutions entières de l'équation (E_1).

   d) Déterminer la solution (u,v) permettant de déterminer J_1.
3. a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1.

   b) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?